Classe: V H Data: 01/02/2010 Compito: II quadrimestre - I scritto Durata: 120’
COMPITO IN CLASSE DI MATEMATICA - TEORIA DELLE DERIVATE
Soluzioni
[siete invitati a utilizzare geogebra per tracciare i grafici]

1 Derivare le seguenti funzioni

$$\sqrt{x}^{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4}\,\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \overset{\text{simplify}}{=} \frac{1}{4}\, x^{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}} (\ln(x) + 2)$$

$$\ln(\cos(3x^2 - 1)) \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} -\frac{6\sin(3x^2-1)\,x}{\cos(3x^2-1)}$$

2 Verificare se la seguente funzione soddisfa l’equazione a fianco

$$e^{x^2 - 2\cdot x} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} (2x-2)\,e^{x^2-2x} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 2\,e^{x^2-2x} + (2x-2)^2\,e^{x^2-2x}$$

$$2\,e^{x^2-2x} + (2x-2)^2 e^{x^2-2x} - 2\cdot x\cdot\left((2x-2)\,e^{x^2-2x}\right) + (4\cdot x - 6)\cdot e^{x^2-2\cdot x} = 0$$

$$2\,e^{x^2-2x} + (2x-2)^2 e^{x^2-2x} - 2x\,(2x-2)\,e^{x^2-2x} + (4x-6)\,e^{x^2-2x} = 0 \tag{1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = x]] \tag{2}$$

$\overset{\text{expand}}{=}$

$$0 = 0 \tag{3}$$

3 Dopo aver disegnato il grafico della seguente funzione definita a tratti studiarne la continuità e la derivabilità. Scrivere le equazioni delle tangenti negli eventuali punti angolosi e delle eventuali tangenti parallele all’asse y

$$piecewise\left(|x| < 1 \textbf{ and } x \neq 0, \ln(|x|), x \leq -1, x^2 - 1, x \geq 1, \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \ln(|x|) & |x| < 1 \textbf{ and } x \neq 0 \\ x^2 - 1 & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & 1 \leq x \end{cases} \tag{4}$$

Nel punto angoloso (-1,0) si hanno le tangenti

$$(y - y_p) = m(x - x_p) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} y = m(x+1)$$

$$y - y_p = m(x - x_p) \tag{5}$$

tangente sinistra

$$x^2 - 1 \text{ assuming } x < 0 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 2x \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -2$$

$$\ln(-x) \tag{6}$$

$y = -2(x+1)$

$$y = -2x - 2 \tag{7}$$

tangente destra

$$\ln(|x|) \text{ assuming } x < 0 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -1$$

$$\ln(-x) \tag{8}$$

$y = -1\,(x+1)$

$$y = -x - 1 \tag{9}$$

4 Risolvere uno dei seguenti problemi:

PROBLEMA A

Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la curva di equazione

$y = \dfrac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1}$

passi per i punti (1;2) e (0;5/2) e che abbia per tangente in questo ultimo punto la retta di equazione

$5 \cdot x + 2 \cdot y - 5 = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{5}{2}$

Disegnare quindi la curva.

Passaggio per il punto (1;2)

$y = \dfrac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 2 = \dfrac{a+b}{c+1}$

Passaggio per il punto (0;5/2)

$y = \dfrac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \dfrac{5}{2} = b$

Tangenza in (0;5/2) uguale alla retta data

$y(x) = \dfrac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x) = \dfrac{2\,a\,x}{c\,x+1} - \dfrac{(a\,x^2+b)\,c}{(c\,x+1)^2}$

$\dfrac{2\,a\,x}{c\,x+1} - \dfrac{(a\,x^2+b)\,c}{(c\,x+1)^2} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -c\,b$

$-c \cdot b = -\dfrac{5}{2}$

$solve\left(\left\{2 = \dfrac{a+b}{c+1}, \dfrac{5}{2} = b, -c \cdot b = -\dfrac{5}{2}\right\}, [a, b, c]\right)$

$$\left[\left[a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}, c = 1\right]\right] \tag{10}$$

$y = \dfrac{\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{2}}{1 \cdot x + 1}$

PROBLEMA B

Determinare i coefficienti a, b, c della funzione

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x + c$

in modo tale che la derivata terza sia

$y''' = 12\,x$

e che la curva grafico della funzione passi per il punto (0;1) avendo come tangente in esso la retta

$y = 2\,x + 1$

Disegnare quindi la curva.

Vincolo derivata

$a \cdot x^4 + b \cdot x + c \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 4\,a\,x^3 + b \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 12\,a\,x^2 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 24\,a\,x$

$24 \cdot a \cdot x = 12 \cdot x \xrightarrow{\text{solve}} \{a = a, x = 0\}, \left\{a = \frac{1}{2}, x = x\right\}$

Vincolo passaggio per (0;1)

$y = a \cdot x^4 + b \cdot x + c \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 1 = c$

Vincolo tangente in (0;1)

$4\,a\,x^3 + b \xrightarrow{\text{evaluate at point}} b$

b=2

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^4 + 2 \cdot x + 1$$