

Soluzioni

[siete invitati a utilizzare geogebra per tracciare i grafici]

1 Derivare le seguenti funzioni

$$\sqrt{x}^{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \stackrel{\text{simplify}}{=} \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}} (\ln(x) + 2)$$

$$\ln(\cos(3x^2 - 1)) \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} -\frac{6 \sin(3x^2 - 1) x}{\cos(3x^2 - 1)}$$

2 Verificare se la seguente funzione soddisfa l'equazione a fianco

$$e^{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} (2x - 2) e^{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 2e^{x^2 - 2x} + (2x - 2)^2 e^{x^2 - 2x}$$

$$2e^{x^2 - 2x} + (2x - 2)^2 e^{x^2 - 2x} - 2 \cdot x \cdot ((2x - 2) e^{x^2 - 2x}) + (4x - 6) \cdot e^{x^2 - 2x} = 0$$

$$2e^{x^2 - 2x} + (2x - 2)^2 e^{x^2 - 2x} - 2x(2x - 2) e^{x^2 - 2x} + (4x - 6) e^{x^2 - 2x} = 0 \quad (1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for } x}$

$$[[x = x]] \quad (2)$$

$\xrightarrow{\text{expand}}$

$$0 = 0 \quad (3)$$

3 Dopo aver disegnato il grafico della seguente funzione definita a tratti studiarne la continuità e la derivabilità. Scrivere le equazioni delle tangenti negli eventuali punti angolosi e delle eventuali tangenti parallele all'asse y

$$\text{piecewise} \left(|x| < 1 \text{ and } x \neq 0, \ln(|x|), x \leq -1, x^2 - 1, x \geq 1, \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \ln(|x|) & |x| < 1 \text{ and } x \neq 0 \\ x^2 - 1 & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} x^2 & 1 \leq x \end{cases} \quad (4)$$

Nel punto angoloso (-1,0) si hanno le tangenti

$$(y - y_p) = m(x - x_p) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} y = m(x + 1)$$

$$y - y_p = m(x - x_p) \quad (5)$$

tangente sinistra

$$x^2 - 1 \text{ assuming } x < 0 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 2x \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -2$$

$$\ln(-x) \quad (6)$$

$$y = -2(x + 1)$$

$$y = -2x - 2 \quad (7)$$

tangente destra

$$\ln(|x|) \text{ assuming } x < 0 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -1$$
$$\ln(-x) \quad (8)$$

$$y = -1(x + 1)$$

$$y = -x - 1 \quad (9)$$

4 Risolvere uno dei seguenti problemi:

PROBLEMA A

Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la curva di equazione

$$y = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1}$$

passi per i punti (1;2) e (0;5/2) e che abbia per tangente in questo ultimo punto la retta di equazione

$$5 \cdot x + 2 \cdot y - 5 = 0 \xrightarrow{\text{isolate for } y} y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$$

Disegnare quindi la curva.

Passaggio per il punto (1;2)

$$y = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 2 = \frac{a + b}{c + 1}$$

Passaggio per il punto (0;5/2)

$$y = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \frac{5}{2} = b$$

Tangenza in (0;5/2) uguale alla retta data

$$y(x) = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + 1} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} \frac{d}{dx} y(x) = \frac{2ax}{cx + 1} - \frac{(ax^2 + b)c}{(cx + 1)^2}$$

$$\frac{2ax}{cx + 1} - \frac{(ax^2 + b)c}{(cx + 1)^2} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -cb$$

$$-c \cdot b = -\frac{5}{2}$$

$$\text{solve} \left(\left\{ 2 = \frac{a + b}{c + 1}, \frac{5}{2} = b, -c \cdot b = -\frac{5}{2} \right\}, [a, b, c] \right)$$

$$\left[\left[a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}, c = 1 \right] \right]$$

(10)

$$y = \frac{\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{2}}{1 \cdot x + 1}$$

PROBLEMA B

Determinare i coefficienti a, b, c della funzione

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x + c$$

in modo tale che la derivata terza sia

$$y''' = 12x$$

e che la curva grafico della funzione passi per il punto (0;1) avendo come tangente in esso la retta

$$y = 2x + 1$$

Disegnare quindi la curva.

Vincolo derivata

$$a \cdot x^4 + b \cdot x + c \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 4 a x^3 + b \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 12 a x^2 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 24 a x$$

$$24 \cdot a \cdot x = 12 \cdot x \xrightarrow{\text{solve}} \{a = a, x = 0\}, \left\{a = \frac{1}{2}, x = x\right\}$$

Vincolo passaggio per (0;1)

$$y = a \cdot x^4 + b \cdot x + c \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 1 = c$$

Vincolo tangente in (0;1)

$$4 a x^3 + b \xrightarrow{\text{evaluate at point}} b$$

$$b=2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^4 + 2 \cdot x + 1$$