Paradossi del Calcolo Combinatorio e delle Probabilità

versione <u>senza risposte</u> v0.1sr

Paradossi del Calcolo Combinatorio e delle Probabilità

I PARADOSSI E IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Un paradosso, dal greco *para*, oltre e *doxa*, opinione, è qualcosa che sfida l'opinione comune. Secondo le parole di Mark Sainsbury è

> *una conclusione apparentemente inaccettabile, che deriva da premesse apparentemente accettabili per mezzo di un ragionamento apparentemente accettabile*

Mark Sainsbury

In questo capitolo vedremo che anche problemi matematici e riguardanti il calcolo delle probabilità possono presentare situazioni sconcertanti… ma non per questo inaccettabili.

> *Quante volte vi ho detto che quando si è eliminato l'impossibile, tutto ciò che rimane, per quanto improbabile, deve essere la verità? "*

Conan Doyle, "Il segno dei Quattro"

Iniziamo con uno dei paradossi più noti e facilmente verificabili.

0.1.1 Il paradosso del compleanno

Quale è la probabilità che, in un gruppo di 25 persone, almeno due di queste siano nate nello stesso giorno e nello stesso mese (anche se in anni diversi)?

Ogni volta che si affronta un problema è fondamentale sottolineare le ipotesi sotto le quali lo si vuole risolvere.

In questo caso, per rendere più semplice il calcolo, assumeremo che

☑ gli anni siano tutti di 365 giorni

☑ le date dei compleanni siano equiprobabili.

Un'analogia.

Immaginiamo che ci sia una grande sala d'attesa con 365 seggiolini. Nella sala entrano 25 persone ad una ad una e ognuna si siede su un seggiolino a caso senza curarsi del fatto che ci possa essere già seduto qualcuno. Quale è la probabilità che almeno una persona si sieda in braccio ad un'altra?

D'altra parte, per analogia, pensa a un bambino che stia facendo una raccolta di figurine composta da 365 i pezzi: che probabilità ha, secondo te, di non trovare neanche un doppione, tra le prime 50 figurine acquistate?

Usa analogie appena puoi. Ciò che in un campo sembra complesso, in un altro può sembrare ovvio. Non fermarti però di fronte alla difficoltà o all'ovvietà ma cerca di rappresentare il problema in modo tale da trovare una giustificazione per il tuo ragionamento.

Come abbiamo appena visto lo stesso paradosso può presentarsi sotto diverse spoglie e paradossalmente è l'abito che indossa a renderlo più o meno sconcertante! D'altra parte nel riformulare uno stesso paradosso spesso vengono cambiati alcuni dati essenziali che ne cambiano radicalmente il risultato.

È questo il caso delle prossime quattro situazioni trattate:

1. Il paradosso delle tre scatole di Joseph Bertrand (1889) (pag 4)
2. Il paradosso delle tre carte di Warren Weaver (1950) (pag 4)
3. Il problema di Monty Hall (1975***verificare) (pag 4)
4. Il problema dei tre prigionieri di Martin Gardner (1959) (pag 6).

0.1.2 Il paradosso delle tre scatole

Ci sono tre scatole identiche. Una contiene due monete d'oro, l'altra due monete d'argento e la terza una moneta d'oro e una d'argento.

Il giocatore sceglie una scatola. Qual è la probabilità che sia la scatola con due monete diverse?

Supponiamo che il giocatore prenda una moneta a caso dalla scatola scelta e che questa moneta sia d'oro. Dopo aver avuto questa informazione, qual è la probabilità che quella sia la scatola con due monete diverse?

Siccome le possibilità per la seconda moneta sono solo 2 (oro o argento), la probabilità sembra essere passata da 1/3 a 1/2.

C'è un errore nel ragionamento e, se c'è, dov'é l'errore?

J. Bertrand. Calcul des Probabilités. Gauthier-Villars, Paris, 1889. Chap. I, art. 2, pp. 2-3.

Prima di continuare prova a rappresentare il problema con un diagramma ad albero avendo l'accortezza di chiamare con nomi diversi le diverse monete (ad esempio O1, O2, A1, A2).

0.1.3 Il paradosso delle tre carte

Giochiamo con tre carte. Una è bianca su entrambi i lati, una è rossa su entrambi i lati e una è bianca da un lato e rossa dall'altro. Ogni carta è nascosta in una scatoletta nera.

Il giocatore sceglie una delle tre scatolette, estrae la carta e la posa sul tavolo in modo che sia visibile un solo lato.

Supponiamo che il lato che si vede sia bianco.

Il conduttore propone al giocatore di scommettere alla pari che è bianco anche l'altro lato della carta (se è bianco vince il conduttore, se è rosso vince il giocatore).

Conviene al giocatore accettare la scommessa? Perchè?

Warren Weaver, 1950

Hai riconosciuto questo problema? È pressoché identico al precedente!

In questo capitolo abbiamo affrontato i problemi con il metodo classico e senza particolari schematizzazioni o espedienti matematici. Non è necessario risolvere un problema con tutti i metodi possibili; sarebbe conveniente scegliere il metodo che lo rappresenta nel modo più semplice ma … come fare? (In ordine sparso) servono sicuramente fortuna, intuito e tanta pratica!

0.1.4 Il problema di Monty Hall

Il problema di Monty Hall è legato al gioco a premi americano Let's Make a Deal. Il nome viene da quello del conduttore dello show, Monty Hall. ***Il problema è anche noto come paradosso di Monty Hall, nel senso che la soluzione è controintuitiva, sebbene il problema non conduca a una contraddizione logica (e dunque l'uso del termine paradosso sia improprio).

Pronto a giocare?

Ti vengono mostrate tre porte chiuse; al di là di una c'è un superpremio, mentre dietro ciascuna delle altre due si nasconde una capra. Ti è permesso aprire una porta, e tenerti ciò che si trova di là da essa. Ad ogni modo, dopo aver selezionato una porta, ma non averla ancora aperta, il conduttore dello show (che conosce ciò che si trova dietro ogni porta) deve aprire un'altra porta, rivelando una delle due capre. Il conduttore ti offre a questo punto la possibilità di cambiare la tua scelta iniziale, passando all'unica porta restante.

Ora tocca a te; puoi adottare una delle seguenti strategie:

a) mantieni la scelta fatta inizialmente;

b) cambi la scelta ed indichi l'altra porta ancora chiusa;

c) scegli a caso tra le due porte chiuse.

Quale è la probabilità di indovinare con la strategia a)?

Quale è la probabilità di indovinare con la strategia b)?

Quale è la probabilità di indovinare con la strategia c)?

0.1.4.1 Il problema nella sua formulazione originale e in quella modificata

Una famosa formulazione del problema, molto probabilmente quella originale, è contenuta in una lettera del 1990 di Craig F. Whitaker, indirizzata alla rubrica di Marilyn vos Savant nel Paradise Magazine (citata da Bohl, Liberatore, Nydick):

> *Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere tra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Ti conviene cambiare la tua scelta originale?*

Quella proposta sopra è una formulazione del problema data da Steve Selvin, in una lettera all'American Statistician (Febbraio 1975). Così impostato, il problema è in realtà una variazione sul tema del gioco a premi originale; **Monty Hall in effetti apriva una porta dietro cui si trovava una capra per aumentare la tensione, ma non consentiva ai giocatori di cambiare la propria scelta originale**. Come scrisse lo stesso Monty Hall a Selvin:

> *E se mai dovesse partecipare al mio gioco, le regole sarebbero le stesse per lei - nessuno scambio dopo la scelta originale.*

—(letsmakeadeal.com)

La vos Savant risolse il problema correttamente; l'episodio fece un certo scalpore, in quanto diversi accademici (fra cui premi nobel e illustri matematici) non riconobbero la correttezza della soluzione proposta dalla vos Savant finché questa non la spiegò nel dettaglio in un successivo articolo. La successiva lettera di Selvin all'America Statistician (Agosto, 1975) battezza il problema come "Problema di Monty Hall".

Quella che segue è una formulazione del problema priva di ambiguità, con vincoli espliciti concernenti il comportamento del conduttore, presentata da Mueser e Granberg:

Dietro ciascuna di tre porte c'è un'automobile o una capra (due capre, un'automobile in tutto); la probabilità che l'automobile si trovi dietro una data porta è identica per tutte le porte;

Il giocatore sceglie una delle porte; il suo contenuto non è rivelato;

Il conduttore sa ciò che si nasconde dietro ciascuna porta;

Il conduttore deve aprire una delle porte non selezionate, e deve offrire al giocatore la possibilità di cambiare la sua scelta;

Il conduttore aprirà sempre una porta che nasconde una capra;

Cioè, se il giocatore ha scelto una porta che nasconde una capra, il conduttore aprirà la porta che nasconde l'altra capra;

Se invece il giocatore ha scelto la porta che nasconde l'automobile, il conduttore sceglie a caso una delle due porte rimanenti;

Il conduttore offre al giocatore la possibilità di reclamare ciò che si trova dietro la porta che ha scelto originalmente, o di cambiare, reclamando ciò che si trova dietro la porta rimasta.

Le possibilità di vittoria aumentano per il giocatore se cambia la propria scelta?

0.1.4.2 Altri punti di vista, varianti e generalizzazioni

Il problema sarebbe diverso se non ci fosse una scelta iniziale, o se il conduttore scegliesse una porta a caso, o se il conduttore potesse offrire al giocatore di cambiare a seconda della scelta iniziale del giocatore. Alcune formulazioni del problema, e significativamente quella del Paradise Magazine, non escludono esplicitamente queste possibilità; diversi testi di probabilità elementare riportano varianti del problema. Per esempio, se il conduttore offre la possibilità di cambiare solo se il giocatore inizialmente ha scelto l'automobile, le chance di vittoria associate alla strategia "cambiare" sono, ovviamente, dello 0%. Nella formulazione proposta nella sezione precedente, il giocatore che cambia ha una probabilità di vittoria pari a 2/3 precisamente perché il conduttore deve offrirgli la possibilità di cambiare, e deve rivelare una capra.

0.1.4.2.1 Due giocatori

Ad alcuni minuti dalla fine del gioco, il conduttore sceglie due concorrenti a cui proporre "la grande scommessa". Dietro a una delle tre porte c'è il premio più consistente. Ad ogni giocatore è permesso scegliere una porta (non la stessa) .

In questo scenario, si può esaminare una variante del problema. Il presentatore elimina il giocatore che abbia scelto una porta con dietro la capra (se lo hanno fatto entrambi, ne viene scelto uno a caso), apre la porta, svelando la capra e poi offre al giocatore rimanente la possibilità di cambiare la propria scelta. Il giocatore dovrebbe effettuare lo scambio?

0.1.4.2.2 n porte

Il problema può forse chiarirsi ulteriormente se invece di tre porte supponiamo che ce ne siano cento. Il gestore, una volta che il giocatore ne ha scelta una, ne apre novantotto: a questo punto cosa sceglie il giocatore? Mantiene la scelta fatta o passa all'altra rimasta chiusa? Generalizzando, di n scatole 1/n è la scelta del giocatore, n-2/n la "liberazione del presentatore". Per mantenere la propria scelta, il giocatore dovrebbe confidare che la 1/n probabilità scelta inizialmente sia proprio quella buona.

Il gioco potrebbe svolgersi in maniera ancora diversa.

Esiste una generalizzazione del problema originale in cui si hanno n porte: nel primo stadio del gioco, il giocatore sceglie una porta. Quindi il conduttore apre un'altra porta, che nasconde una capra. Se il giocatore vuole, può quindi cambiare scelta e passare a un'altra porta. Il conduttore aprirà allora un'ulteriore porta, ancora non aperta, che nasconde una capra, diversa da quella attualmente scelta dal giocatore. Il giocatore ha quindi la possibilità di cambiare ancora scelta, e così via. Questo procedimanto continua fino a che non restano che due porte non ancora aperte: la scelta corrente del giocatore, e un'altra porta. Quante volte dovrebbe cambiare scelta il giocatore, e a che punto del gioco (sempre che cambi almeno una volta)?

La migliore strategia è: restare con la prima scelta sino a che non rimangono solo due porte e a quel punto cambiare. Seguendo questa strategia la probabilità di vincere è (n - 1) / n. ***Questa variante del paradosso di Monty Hall si deve a Bapeswara Rao e Rao.

Attenzione! Nel problema appena osservato i dati che vengono forniti “in più” rispetto a quelli iniziali (dove si trovano una o più capre) offrono informazioni in grado di stravolgere i risultati. Non sempre è così.

0.1.5 Il paradosso dei tre prigionieri

Nel braccio della morte, tre prigionieri aspettano l'alba della fucilazione. In onore del compleanno del re, si sa che uno dei tre sarà graziato, e il guardiano sa chi dei tre avrà salva la vita, ma non lo vuole svelare.

Uno dei tre (chiamiamolo A), attanagliato dall'angoscia, gli dice: "Dato che uno solo dei tre sarà graziato, certamente uno degli altri due (B e C) dovrà morire. Se mi dici il nome di uno fra B e C, destinato a morire domani all'alba, ti regalo il mio orologio d'oro. Tu non tradisci il segreto, perchè non sveli il graziato, e io avrò un po' meno angoscia. "Il guardiano si fa convincere e svela: "B morirà".

A dona il suo orologio alla guardia e si sente sollevato: Aveva il 33% di chance di salvarsi, ora restano solo lui e C, quindi le sua possibilità sono cresciute al 50%.

E' corretto il suo ragionamento?

Martin Gardner nella rubrica Mathematical Games (1959)

Ragioniamo insieme.

Possiamo riconsiderare questo problema a partire dalle considerazioni fatte per il paradosso di Monty Hall.

Delle tre strategie disponibili (mantenere la scelta, cambiare, andare a caso tra le rimanenti) solo una (mantenere la scelta) può applicarsi in questo caso. Per capirlo dobbiamo comprendere quale corrispondenza ci sia tra i personaggi del gioco di Monty Hall e quelli di questo problema.

Secondo te in questo problema chi "rappresenta" il presentatore, chi il giocatore, chi le capre, chi infine la macchina?

A nessuno verrebbe in mente di raccontare una barzelletta tralasciando o cambiando le battute essenziali. Spesso non viene riservata la stessa attenzione ai problemi e questo dà luogo a fraintendimenti o a situazioni (almeno apparentemente) paradossali come nei due casi seguenti.

0.1.6 Il paradosso dei due figli

"Un uomo ha due figli e almeno uno dei due è maschio. Qual è la probabilità che anche l'altro sia maschio?"

"Un uomo ha due figli e **il maggiore** è maschio. Qual è la probabilità che anche l'altro sia maschio?"

Non solo le due formulazioni differiscono di poche parole ma entrambe sono incomplete. Che probabilità c'è di avere un figlio maschio anziché una figlia?

In mancanza di dati è sempre necessario, prima di poter risolvere un problema, definire le ipotesi mancanti essenziali per la risoluzione!

In questo caso ipotizziamo che siano equiprobabili la nascita di un maschietto o di una femminuccia.

In questo problema lo spazio degli eventi è davvero piccolo e i suoi elementi possono essere rappresentati in un grafo ad albero o facilmente immaginati.

0.1.7 Il paradosso del secondo asso

In certe situazioni, come abbiamo detto, specificare un dettaglio ulteriore può variare la probabilità del risultato. Si consideri ad esempio il paradosso del secondo asso, che si pensa sia stato creato dal matematico inglese Henry Whitehead, del Balliol College di Oxford, nel 1939. La formulazione originale prevedeva un gioco con la distribuzione di tredici carte; ma una variazione del paradosso, in cui si utilizzano solo quattro carte rende più semplice il calcolo delle probabilità e anche più evidente il punto critico del paradosso.

Un gioco di carte prevede due giocatori e un mazzo di quattro carte: l'asso di picche (**A♠**), l'asso di cuori (**A♥**), il fante di quadri (**J♦**) e il due di fiori (**2♣**). Si mescolano le carte e il giocatore A prende due carte dal mazzo. Il giocatore A guarda le carte e dichiara: « Ho un asso ». Qual è la probabilità che egli abbia anche l'altro asso?

Consideriamo ora questa situazione.

Supponiamo che due giocatori si accordino in anticipo su un determinato asso - per esempio, l'asso di picche - e che, successivamente, il giocatore A, dopo aver preso le carte, annunci di avere proprio l'asso di picche. Qual è la probabilità che egli abbia il secondo asso?

Perchè questa differenza nella conoscenza altera la probabilità nei due casi?

In entrambi i casi la nostra attenzione viene richiamata su un sottoinsieme di tutte le possibili distribuzioni, ma il sottoinsieme è più grande nella prima situazione (cinque possibilità) rispetto alla seconda situazione (tre possibilità). Naturalmente, in entrambe le situazioni c'e' sempre un solo caso in cui il giocatore A si trova ad avere ambedue gli assi.

Per risolvere questo problema è stato sufficiente una rappresentazione dello spazio degli eventi… ma se lo spazio diventa molto più grande?

Seguendo lo stesso principio, anche se in un contesto più complesso, prova a calcolare le probabilità di un secondo asso in mano nelle due seguenti situazioni:

Se, in una partita a Bridge, un giocatore afferma genericamente: «Ho un asso» quale è la probabilità che in mano abbia anche un secondo asso?	Se, in una partita a Bridge, un giocatore afferma genericamente: «Ho l'asso di cuori», quale è la probabilità che in mano abbia anche un secondo asso?

Abbiamo appena visto come una informazione in più possa far cambiare radicalmente la soluzione di un problema. Vediamo ora come un dato in meno possa rendere un problema paradossale.

0.1.8 Il paradosso dei due treni

"Un ragazzo ha due fidanzate: la prima abita a est, la seconda a ovest. Per andarle a trovarle deve prendere il treno, e poiché i due treni (uno che va ad est e uno che va ad ovest) passano entrambi ogni 20 minuti, il ragazzo lascia che sia il caso a decidere da quale fidanzata andrà: ogni giorno esce di casa ad un orario casuale e prende semplicemente il primo treno che arriva. Come mai, allora, alla fine dell'anno si accorge di essere andato a trovare circa tre volte su quattro la fidanzata che sta a est?"

Questo paradosso deriva da una formulazione incompleta del problema.

Attenti, quando cercate di valutare i casi possibili questi possono non essere tutti equiprobabili !

La risposta è che i due tempi di attesa non sono identici (ECCO IL DATO CHE MANCAVA):

Possiamo quindi pensare al problema proposto in uno dei seguenti modi.

1) Costruiamo un bersaglio che abbia un'area verde uguale a quella dei quadratini verdi e un'area blu uguale a quella dei quadratini blu. Lanciando una freccetta per molte volte sul bersaglio e ipotizzando che la freccetta ne colpisca ogni punto con ugual probabilità quante volte mi aspetto di colpire l'area verde rispetto a tutti i lanci fatti?

2) Ci sono 20 biglietti in un urna. Di questi 15 sono verdi, 5 blu. Dopo molte estrazioni con reimmissione quanto vale il rapporto tra estratti verdi ed estratti totali?

Se, come abbiamo appena visto, la mancanza di informazioni può portarci a osservare situazioni inaspettate, l'irrealizzabilità di alcune situazioni può causare altrettanto sgomento.

0.1.9 Testa o croce?

LA COMMEDIA del 1966 "Rosencrantz e Guildenstern sono morti", del drammaturgo inglese Torn Stoppard, si apre presentando i due protagonisti impegnati nel gioco del lancio di una moneta. Lo sfortunato Guildenstern ha fatto novanta lanci di fila: tutte le monete sono cadute mostrando la testa e quindi sono state date a Rosencrantz. Malgrado l'improbabilita di una tale serie di lanci, sia Rosencrantz che Guildenstern sono costretti a riconoscere la sua reale possibilità. Di fatto, il loro gioco allude a uno dei più antichi e più importanti paradossi della probabilità.

Rimaniamo ancora un momento con questi due personaggi, oltremodo appassionati di questo genere di gioco d'azzardo.

Essendosi stancati di lanciare semplicemente le monete, Rosencrantz suggerisce una variazione: egli lancerà una moneta fino a quando non apparirà testa. Se ciò avviene al primo lancio, darà 1 dollaro a Guildenstern; se avviene al secondo lancio, ne darà 2; se avviene al terzo lancio, ne darà 4, e cosi via, raddoppiando la posta per ogni tiro successivo, fino al momento in cui non appare testa per la prima volta.

Il problema è: qual è la giusta somma di denaro che Guildenstern deve dare a Rosencrantz per avere la possibilità di partecipare a questo gioco?

Il matematico svizzero Nikolaus Bernoulli presentò per primo questo problema nel 1713. Il problema venne successivamente modificato e pubblicato da Daniel Bernoulli, nipote del suo ideatore, negli Atti dell'Accademia di Pietroburgo. Se applichiamo l'analisi di Bernoulli alla situazione prima descritta, Guildernstern dovrebbe pagare a Rosencrantz una somma infinita di denaro per rendere equilibrato il gioco; in altre parole: non vi è alcuna somma di denaro in grado di rendere equilibrato il gioco. Per comprenderne la ragione, occorre soffermarsi sulla natura dei giochi e sul metodo per calcolare le probabilità degli eventi del tipo di quello descritto nel paradosso di Pietroburgo.

Il problema fondamentale della teoria dei giochi consiste nel determinare come un giocatore possa ottenere la massima utilità, cioè il risultato più favorevole che, in questo caso, è rappresentato dalla somma più alta di denaro. Rimanendo inalterate tutte le altre circostanze (il che non accade mai) una persona risulterebbe comportarsi in modo razionale se, e solo se, agisse nella maniera che le può garantire il massimo guadagno; cioè Guildenstern vuole vincere a Rosencrantz piu denaro possibile, e viceversa.

Come calcolare la posta iniziale che renda equilibrato un gioco basato sulle regole descritte?

Se non è possibile giocare un numero infinito di giochi nè scommettere una quantità infinita di denaro, quale potrebbe essere la scommessa equa contro un banco definito, ad esempio di 1.000.000 di dollari?

Concludiamo la nostra rassegna di situazioni paradossali con un problema che non richiede alcun particolare ragionamento per essere risolto, ma una particolare apertura mentale per essere “digerito”.

0.1.10 Paradosso dell'inversione statistica

Iniziamo con una domanda facile facile.

Sul tavolo del preside ci sono due barattoli di caramelle, uno nero e l'altro bianco. Ogni barattolo contiene un misto di caramelle alla liquirizia e di caramelle al gusto di papaia, gli unici due generi graditi al nostro preside. Nel momento che prendiamo in considerazione, nel barattolo bianco ci sono 50 caramelle alla liquirizia e 60 caramelle alla papaia, mentre quello nero ne contiene 30 alla liquirizia e 40 alla papaia. Se il preside volesse una caramella alla liquirizia e ne potesse scegliere solo una, senza guardarla, da quale barattolo gli converrebbe prenderla per assicurarsi il massimo delle probabilità?

Immaginiamo ora lo stesso tavolo e gli stessi barattoli; soltanto che questa volta essi contengono un assortimento di caramelle leggermente diverso. Quello bianco contiene 60 caramelle alla liquirizia e 30 alla papaia; quello nero 90 alla liquirizia e 50 alla papaia. Da quale barattolo il preside dovrebbe fare la sua scelta per avere la massima probabilità di prendere una caramella alla liquirizia?

Nulla di ciò risulta particolarmente paradossale; si tratta di un semplice calcolo matematico.

Ma si consideri ora una situazione in cui siano stati mescolati i contenuti dei due barattoli bianchi prima descritti, e così pure i contenuti dei due barattoli neri. In questa situazione qual è il barattolo da scegliere, per avere la massima probabilità di prendere una caramella alla liquirizia?

Come questo semplice esempio dimostra, è possibile che i dati di due casi differenti, considerati separatamente, conducano alla stessa conclusione: il barattolo bianco offre la maggiore probabilità di scegliere una caramella alla liquirizia mentre quando sono considerati insieme portano alla conclusione contraria. I problemi statistici della vita possono non essere particolarmente fastidiosi quando si ha a che fare con le caramelle, ma possono avere implicazioni serie nel caso di progetti di ricerca in campo medico, economico o di altro tipo. Per esempio, lo studio medico di un caso simile presentato da Colin R. Blyth, professore di matematica all'Universita dell'Illinois viene definito paradosso di Simpson, dal nome dello studioso inglese di statistica, E.FI. Simpson, che ne scrisse per primo nel 1951.

Alla luce di quanto detto ***cerca sempre di utilizzare il tuo intuito per rappresentare il problema, non per azzardare una risposta*** *e acquista confidenza con le diverse rappresentazioni (ad albero, insiemistica, matematica); spesso* ***una corretta rappresentazione offre la soluzione su un piatto d'argento!!!***

Bibliografia

Laboratorio Virtuale di Probabilità e Statistica

http://www.ds.unifi.it/VL/

Lucidi delle lezioni per la SILSIS del professor Betrò

http://www.mi.imati.cnr.it/~bruno/appuntiSILSIS/

I mattoni della scienza

http://www.geocities.com/codadilupo_2000

Progetto Matematica dell'università di Bologna

http://progetto_matematica.dm.unibo.it/Combinatoria/home.htm

Altro lavoro dell'università di Bologna

http://ishtar.df.unibo.it/stat/copertina/intropackage.html

Chi ha paura della matematica

www.chihapauradellamatematica.org

Introduzione alla probabilità e alla statistica

http://zeus.roma1.infn.it/~agostini/PRO/PRO.html

Probabilità e incertezza di misura

http://zeus.roma1.infn.it/~agostini/PRO/PRO.html

Wikipedia

http://it.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A0

Educazione & Scuola

http://www.edscuola.it/archivio/didattica/probabilita.html

Matematicamente

http://www.matematicamente.it/statistica/probabilit%C3%A0.htm

Introduzione al calcolo delle Probabilità

http://digilander.libero.it/robicox/dispense/probability/mainprobability/mainprobability.html

Appunti, schemi e riassunti

www.studenti.it

Nicholas Falletta, *Il libro dei paradossi*, Tea Scienze

Paul Hoffman, *The man who loved only numbers*

Massimo Piattelli Palmarini, *L'illusione di sapere*

Mark Haddon, *Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, Einaudi

P. M. Higgins, *Divertirsi con la matematica* . Bari, Ed. Dedalo